Fundación Telefónica Panamá

Fundación para el Desarrollo Sostenible de Panamá

Universidad de Panamá
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología
Departamento de Matemática

PROYECTO MATHLAB 2017

Folleto

"Conceptos Básicos de Aritmética"

Este folleto fue preparado por las Profesoras de Matemática:

ANALIDA ARDILA, MAYRA MURILLO,

MARLENE LARRIVA, EDILMA JUDITH DÍAZ

ÍNDICE

DIFICULTAD PARA EL APRENDIZAJE DE LA ARITMETICA
María A. Rebollo

Las publicaciones sobre las dificultades en el aprendizaje de la aritmética son, contrariamente a lo que sucede con la lecto-escritura, escasas y fragmentarias. Esto puede deberse a que:

1. En los primeros años del aprendizaje escolar se da más importancia al aprendizaje de la lectura y la escritura que a la del cálculo;
2. En segundo término, a que la enseñanza tradicional de la aritmética está dirigida, por lo menos en su comienzo, a asegurar la adquisición de los mecanismos fundamentales del cálculo sin el apoyo de una comprensión y un conocimiento preciso de las nociones fundamentales. De esta manera, las dificultades pueden permanecer latentes hasta que el niño se enfrenta a problemas complejos que requieren un razonamiento elaborado y preciso.

   Antes de entrar en las dificultades en el aprendizaje de la aritmética nos referiremos brevemente a qué es aritmética, cuáles son sus objetivos, cuáles son los prerrequisitos para su aprendizaje.

1. La aritmética.

A) Definición.

Las matemáticas constituyen, antes que nada, una actividad mental que conduce a la formación de conceptos abstractos, independientes del material empleado y la situación real de la que surgieron, y permite al individuo razonar sobre formulaciones o proposiciones.

Sin embargo, éste debe ser el punto de llegada de todo el aprendizaje matemático y no el de partida como se ha entendido en ciertos períodos.

La enseñanza actual de esta ciencia está orientada sobre la concepción de que la sistematización y las etapas de formalización abstracta son el último estadio del aprendizaje matemático.

B) Objetivos de la enseñanza.

Pueden esquematizarse en: objetivos que se refieren al aspecto específicamente matemático; objetivos que se relacionan con el aspecto social.

a) Objetivos que se refieren al aspecto específicamente matemático.

Entre ellos tenemos:

1. Adquisición de conceptos relativos al número, síntesis del sistema de clases y relaciones y comprensión del sistema decimal.
2. Conocimientos y destreza en las operaciones realizadas con dichos números, sus relaciones y propiedades, incluyendo las fracciones como extensiva del sistema numeral.
3. Comprensión y uso del vocabulario matemático en sus aspectos cuantitativos (mucho, cuanto, etc.) y en lo referente a la nomenclatura de los procesos particulares (adición, producto, suma, etc.).
4. Cultivo de la aptitud para la resolución de problemas.
5. Aptitud para el uso de sistemas de medidas.
6. Desarrollo del factor espacial.

b) Objetivos que se relacionan con el aspecto social.

Se refieren al desarrollo de la conciencia de la necesidad del uso de los números en situaciones vitales, a la interpretación de gráficas, esquemas, señales, mapas, etc.

Comprende también la utilización a nivel elemental de los conceptos matemáticos en el aspecto económico relacionado con el consumo y la producción.

c) Requisitos para la función del cálculo y evolución de la noción de número y de las operaciones del cálculo.

En el aprendizaje del cálculo pueden describirse las etapas de: adquisición del número, de las operaciones y resolución de las situaciones problemáticas.

d) Adquisición de la noción de número

El número es una abstracción que se forma muy lentamente en el niño a través de las experiencias de la vida.

Según Piaget, el número es la síntesis operatoria de la seriación y la clasificación, pues es mediante ambas que el niño puede llegar a la noción de número. Puede decirse que es un sistema de clases formada por él y su sucesor.

El número cardinal es la igualdad de la cantidad en grupos de objetos diferentes, independientemente de su naturaleza. Se llega a él por correspondencia término a término o por numeración de los objetos. Está íntimamente unido a la noción de invariabilidad de un grupo de unidades.

El número ordinal es la diferencia de lugar en la serie. La ordenación de los números es la manera como uno lo dispone uno después del otro, dependiendo su valor de la posición relativa en la serie.

En la ordenación se basa el contar.

En esta acción hay una referencia concreta a los dedos. Por esto muchos autores consideran importante el conocimiento de la posición respectiva de los dedos.

Para llegar al número se consideran fundamentales 3 condiciones psicológicas: la conservación del todo, la seriación de los elementos y su clasificación.

Hay *conservación del todo* cuando el niño tiene la certeza de que el todo es un conjunto de partes que se pueden distribuir como uno quiera. La relación de las partes a todo es la relación lógica constitutiva de esta conservación.

No hay conservación del conjunto mientras el niño non pueda pensar simultáneamente en el todo y en la parte, mientras no haya reversibilidad del pensamiento. Esto es lo mismo que decir, hasta que el niño no llegue al período de las operaciones concretas.

Es necesaria la *seriación y la clasificación* porque el niño debe ser capaz de concebir los elementos de una serie como a la vez equivalentes y no equivalentes.

Equivalentes en cuanto a poder ser agrupados en la misma clase caracterizada por el número cardinal, y no equivalentes porque pudiendo ser seriados porque son semejantes son diferentes por el lugar que ocupan en la serie.

Cuando el niño es capaz de comparar dos cantidades, cuando ha llegado a las nociones de seriación, clasificación y conservación, puede abordar la numeración.

Una vez adquirida esta noción debe hacer la *correspondencia cantidad-símbolo y expresar a éste en forma gráfica*.

La escritura de los números tiene dificultades similares a las de las letras pues se trata de un simbolismo en segundo grado, por lo tanto necesita una función simbólica suficientemente desarrollada. Sin embargo, es algo más simple porque la cantidad de números es mucho menor que la de las letras.

Se debe producir una unión reversible entre experiencia concreta, traducción verbal y representación gráfica.

Una nueva complicación surge cuando comienza la *numeración decimal,* pues se agregan datos arbitrarios.

El niño se encuentra ante una convención bastante sutil ya que el valor del signo depende de su posición relativa: las unidades están a la derecha y las decenas a la izquierda.

La operación es para Piaget, la acción interiorizada. Para el niño hay una gran diferencia entre la acción concreta y rica en acontecimientos que se desarrolla en el tiempo y en el espacio y su traducción simbólica por medio de signos que no tienen ningún valor afectivo.

El niño que toma bolitas, las da, las reparte, vive una acción duradera que debe traducir en una operación aritmética que es algo que no existe.

La operación escrita tiene los mismos tiempos que la acción ejecutada y su resultado, pero el niño no ve las etapas. Esta diferencia puede confundir al niño si no ha llegado a un cierto grado de abstracción.

En la operación el niño tiene que representar simbólicamente estados y acciones que se suceden en el tiempo y en el espacio para lo que tiene que poseer la estructura en 3 tiempos: antes -lo que hace- después y sus expresiones lingüísticas.

Las 4 operaciones aritméticas corresponden a acciones o situaciones psicológicas, pero hay más situaciones que operaciones.

La suma es una operación de reunión.

La resta es más compleja. Puede servir para calcular lo que pueda, para hacer la comparación y para calcular la parte desconocida de una suma en la que se conoce la otra parte.

La multiplicación es un caso particular de la suma en la que todos los sumandos son iguales.

La división a su vez corresponde a dos acciones diferentes: partición y distribución.

El niño que es capaz de operar debe poder traducir una operación concreta simple en términos aritméticos y frente a una operación aritmética indicar la acción simple que corresponde a ella. Esto es *comprensión* de las operaciones.

Debe conocer también el *mecanismo* de las operaciones para lo que es importante el conocimiento del espacio y la orientación.

Esto porque el niño debe alinear las cifras y colocarlas unas en relación a otras.

Esto es importante en la suma y la resta.

Debe escribir los números de izquierda a derecha y resolver las operaciones de derecha a izquierda; y en la división tienen que ir del dividendo al divisor o sea de izquierda a derecha para obtener el cociente y en un segundo tiempo, de derecha a izquierda o sea del cociente-divisor al dividendo, para hallar lo que resta.

Esto sólo puede hacerlo el niño que tiene la conmutatividad relacionada a la reversibilidad y la noción de orden relacionada con la estructuración espacial.

Otro aspecto importante es que el niño debe *retener* lo que ha aprendido. Esto fundamentalmente en relación a las tablas. Para ello es necesaria la repetición sistemática y la reflexión sobre la estructura del sistema decimal.

Es también de suma importancia el aspecto de reversibilidad de las operaciones por lo que es conveniente enseñarlas como inversas unas de otras.

e) Los problemas.

Para resolver un problema es necesario: comprender el enunciado; razonar sobre los datos.

Para *comprender el enunciado* es necesario un nivel general de lenguaje que permita comprender los diferentes tipos de palabras o expresiones del problema.

Esto no significa solamente conocer el lenguaje habitual sino las palabras del lenguaje habitual usadas con un sentido particular y las palabras que pertenecen al lenguaje matemático. En el primer caso por ejemplo, repartir que en matemáticas se usa como distribuir igualmente; y en la otra palabra como sumando, dividendo, etc.

Comprendidas las palabras debe representarse las acciones; recordar su desarrollo; ponerlas en relación; unirlas lógicamente.
Esto es el *razonamiento aritmético.*

Para que el niño aprenda aritmética debe entonces poseer las siguientes condiciones: C.I normal; estar motivado; tener equilibrio emocional aceptable; recibir una enseñanza adecuada; *haber alcanzado el nivel de las operaciones concretas; tener un buen desarrollo de la función simbólica; tener una buena estructuración espacial y témpora-espacial.*

2. Dificultad en el aprendizaje de la aritmética.

A) Definición.

La dificultad en el aprendizaje de la aritmética se denomina habitualmente *discalculia*.

El término discalculia surgió del de *acalculia* usado por Hensen en 1919 para denominar un trastorno del cálculo provocado por una lesión focal del cerebro.

En 1924 Gerstmann llamó la atención sobre un síndrome que incluía entre sus síntomas la acalculia pero tenía además agnosia digital, indistinción derecha-izquierda, agrafia y apraxia constructiva. Destacó la importancia entre el conocimiento de los dedos y las primeras adquisiciones del cálculo.

B) Clasificación.

La acalculia del adulto ha sido clasificada de diferentes maneras.
Hensen diferenció: *acalculia en sentido amplio* en la que hay trastornos en la lectura y escritura de las cifras, y *acalculia en sentido estricto* que corresponde a la dificultad en las operaciones del cálculo mental.

Kleist en 1924 identificó entre los trastornos del cálculo varios tipos: *alexia de las cifras* que se observa dentro de un cuadro global de alexia.
Los enfermos pueden calcular mentalmente pero no pueden leer un número de 2 ó 3 cifras. Habitualmente es el trastorno residual de una *afasia, agrafia de las cifras* que se relaciona a la apraxia y a la agrafia de las letras.

Se subdivide en 2 tipos: *apraxica mieloquinética* en la que falla el movimiento para escribir la cifra; *apracto-constructiva*, en la que la dificultad está en la orientación espacial; *acalculia*, que es la alteración del cálculo mental sin alexia.

Hasserts-van Geerstruyden considera 2 formas: la dificultad en el conocimiento de la posición de las cifras en el número y en las operaciones escritas en la que lo que está perturbado es el plan para efectuar el cálculo ya que se colocan mal las cifras, pero el cálculo mental es normal; la *dificultad* en el sistema cuantitativo y la función representativa del número, en la que hay dificultad en el cálculo mental ya que las funciones mencionadas son su base.

Hécaen y Ajuriaguerra identifican 3 grupos desde el punto de vista semiológico: alexia de las cifras, anarritmia o imposibilidad de realizar las operaciones y discalculia de tipo espacial.

De acuerdo a todo lo dicho y a lo que hemos visto al estudiar en el niño los grupos siguientes:

I) Dificultad inespecífica en el aprendizaje de la aritmética:
   1) Por enseñanza insuficiente;
   2) Por C.I bajo;
   3) Por falta de motivación
   4) Por problemas afectivo-emocionales;
   5) Por graves fallas instrumentales motoras o sensoriales;

II) Dificultad específica en el aprendizaje de la aritmética:
   1) Por dificultad en el razonamiento lógico-matemático o discalculia en el sentido estricto;
   2) Por dificultades o alteraciones en otras funciones psiconeurológicas o discalculia en sentido amplio.

Ellas pueden ser causadas por alteración en la función semiótica:

a) Dificultad en la lectura de cifras;
b) Dificultad en la comprensión del lenguaje. Este tipo está muy íntimamente relacionado con la discalculia en el sentido estricto ya que el nivel de pensamiento influye en la comprensión, alteraciones espaciales y témporo-espaciales, alteraciones de la memoria.

Como es bien sabido es casi imposible separar las funciones psicológicas unas de otras, pero esta separación se hace teniendo en cuenta la alteración más saliente.

Es frecuente que ambos tipos de discalculia se observen juntas y que la discalculia no se observe aislada sino en una dificultad global del aprendizaje. Es importante sin embargo poner en evidencia los factores que intervienen en la determinación de la alteración para la reeducación.

C) Estudio del niño con dificultad en el aprendizaje de la aritmética.

Es igual al de cualquier niño con dificultad de aprendizaje.
Comprende:

a) Estudio neurológico.
Historia clínica. Buscando Con todo detalle las características del aprendizaje y de la escolaridad: escuela a la que concurre, cambio de escuela, asiduidad del niño, cambio de maestras, adaptación al medio escolar, motivación para el estudio y para la aritmética, relación con el maestro y los compañeros, actitud del niño, de los padres y del maestro frente a la dificultad, condiciones en que hace los deberes y disposición para hacerlos.

Debe investigarse también todo aquello que haga pensar o descartar: retardo mental, problemas afectivo-emocionales importantes, etc.

En los antecedentes del niño, factores etiológicos de daño neurológico, síntomas de disfunciones cerebrales.

En los antecedentes familiares debe insistirse en las dificultades del aprendizaje y en las características de disfunción.

Examen neurológico. Debe realizarse un buen examen neurológico. No digo como otros un examen neurológico que en el niño debe ser siempre con fines de establecer nivel evolutivo y teniendo en cuenta funciones psico-neurológicas (gnoso-praxia, percepción visual, visuo-espacial, témporo-espacial, lateralidad, etc.).

Como esencial dentro del examen neurológico debe hacerse un estudio del lenguaje, clínico y por medio de pruebas. En nuestro medio se usa la batería de Benton adaptada al niño por los Dres. Mendilaharsu y las pruebas psicolingüísticas de Sinclair.

Exámenes complementarios. EEG y otros cuando el caso lo requiera.

b) Estudio pedagógico.

Es en este caso fundamental.

Comprende 3 etapas: diagnóstico general; diagnóstico analítico; establecimiento de un perfil de rendimiento.

Primera etapa o diagnóstico general.

Se aplica una prueba que permite determinar el nivel de rendimiento del niño. Ella comprende los aspectos siguientes:

Sistema numeral. Comprende los aspectos fundamentales del sistema decimal de numeración, la composición asociativa y disociativa del número, el valor relativo o posicional de las cifras, el ordenamiento y seriación de cantidades numéricas.

Cálculo. Se refiere a la comprensión del sentido de las operaciones, sus propiedades, su aplicación y destreza en técnicas.

Fracciones. Es un aspecto de la estructura numeral que exige un mayor dominio en la comprensión de las relaciones. Comprende la representación, cálculo de la parte por el todo y viceversa y operaciones con fracciones.

Sistema de medidas. Se refiere al uso de unidades arbitrarias de medida hasta la utilización de las unidades legales de nuestro sistema.

Aplicación social. Comprende los aspectos relacionados con la fase social del estudio matemático ya mencionada.

La prueba está estructurada en 3 niveles por cada grado escolar, correspondiendo el último cada uno al primero del siguiente.

La **segunda etapa** es el **diagnóstico analítico.**
Permite determinar los elementos que configuran la dificultad comprobada.

Tercera etapa. Consiste en el análisis y evaluación de todas las pruebas realizadas para establecer el perfil de rendimiento que es útil para la reeducación.

c) Estudio psicológico.
Comprende:

Estudio del C.I.
Se realiza con el Wisc.

Pruebas de Piaget.
Para establecer el nivel de pensamiento lógico-matemático. Se emplean las pruebas de conservación de la sustancia ya sea platicina o líquidos.

También se realizan pruebas de clasificación y seriación.

Estructuración espacial y témporo-espacial.
Bender, Piaget-Head, ritmo de M. Stambak.

Gnosias Digitales.
Este estudio neuro-psico-pedagógico nos ha permitido identificar los grupos que hemos mencionado.
Dentro de las dificultades específicas destacamos:

El **primer grupo** en el que hay dificultades en la comprensión referida ya sea al sistema numeral, sus relaciones y operaciones, ya a los conceptos lógicos elementales, ya a la resolución de problemas, o sea a lo que corrientemente se entiende por razonamiento aritmético.

El **segundo grupo** en el que las dificultades relativas al cálculo se refieren ya a los problemas de tipo espacial (rotaciones, inversiones, incorrecta colocación de las cifras, etc.) tal como se observa en los disléxicos; ya sea a la incapacidad para lograr fluidez en los mecanismos del cálculo (dificultad en memorizar las tablas, olvido de “lo que se lleva”, etc.); ya sea dificultad en la comprensión del lenguaje.

El primer grupo corresponde a la acalculia en el sentido estricto de Hensen, a la acalculia de Keist, a la dificultad en el sistema cuantitativo y la función representativa del número de Hassaerts-van Geerstruyden.

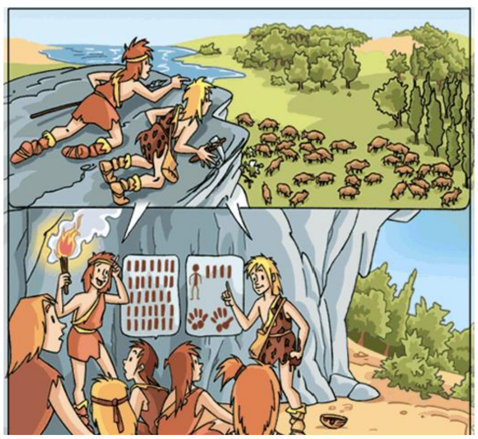
El segundo grupo a su vez, corresponde a la acalculia en sentido amplio de Hensen, la alexia y agrafia de las cifras de Kleist, la dificultad en el conocimiento de la posición de las cifras en el número y las operaciones de Hassaerts.

Actividad #1.

Realice una lectura comprensiva y destaque los puntos principales de los objetivos de la Aritmética en los programas de MEDUCA, compárelos con lo que señala la autora y las dificultades que encuentra usted en el aprendizaje de la aritmética y los aspectos que la autora describe.

2. SISTEMA DE NUMERACIÓN DE DISTINTAS BASES

El hombre empezó a contar usaron los dedos, guigarros, marcas en los árboles o pedazo de rama, nudos en una cuerda y otras formar que se les ocurría. Luego el hombre se dio cuenta que a medida que la cantidad crece se hace necesario un sistema de representación más práctico y más sencillo para llevar sus cuentas.

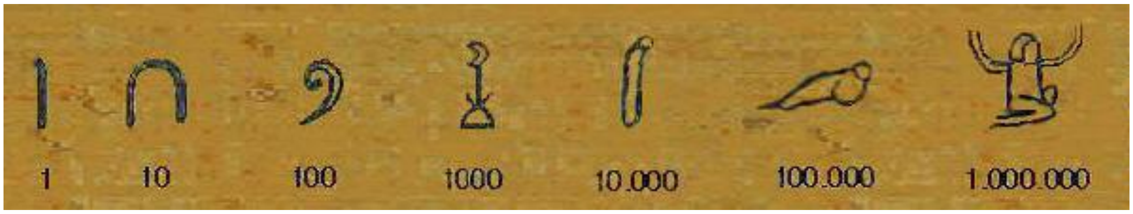
Marcas	Nudos en las cuerdas
	

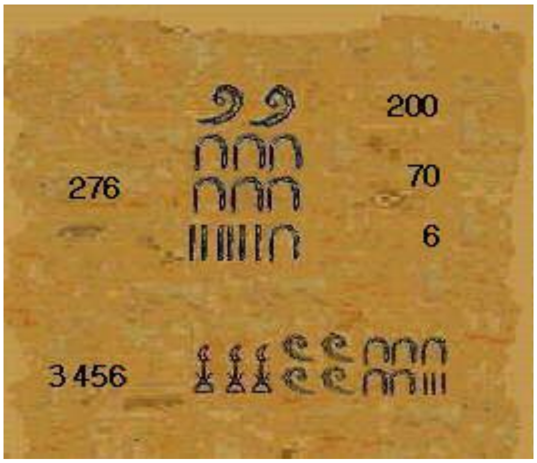
Un sistema de numeración es un conjunto de símbolos y reglas que permiten representar datos numéricos. Los sistemas de numeración actuales son sistemas posicionales, que se caracterizan porque un símbolo tiene distinto valor según la posición que ocupa en la cifra.

A continuación describiremos cuatro sistemas de numeración más sobresalientes en la historia, destacando sus elementos principales y los símbolos que ellos utilizaron para representar las cantidades

2.1 SISTEMA DE NUMERACIÓN EGIPCIA

Desde el tercer milenio A.C. los egipcios usaron un sistema de escribir los números en base diez utilizando los jeroglíficos de la figura para representar los distintos órdenes de unidades.



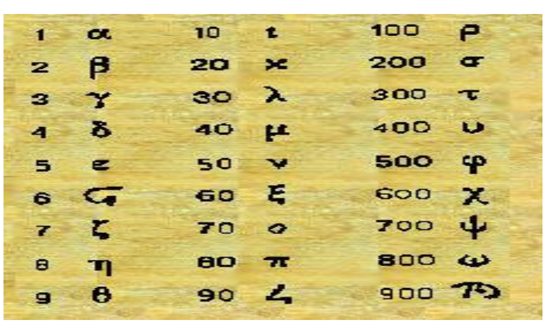


Se usaban los jeroglíficos tantos de cada uno cómo fuera necesario y se podían escribir indistintamente de izquierda a derecha, al revés o de arriba abajo, cambiando la orientación de las figuras según el caso.
Al ser indiferente el orden se escribían a veces según criterios estéticos, y solían ir acompañados de los jeroglíficos correspondientes al tipo de objeto (animales, prisioneros, vasijas etc.) cuyo número indicaban. En el ejemplo aparece el 276 tal y como figura en una estela en Karnak.
Estos signos fueron utilizados hasta la incorporación de Egipto al imperio romano. Pero su uso quedó reservado a las inscripciones monumentales, en el uso diario fue sustituido por la escritura hierática y demótica, formas más simples que permitian mayor rapidez y comodidad a los escribas.

2.2 SISTEMA DE NUMERACIÓN GRIEGO

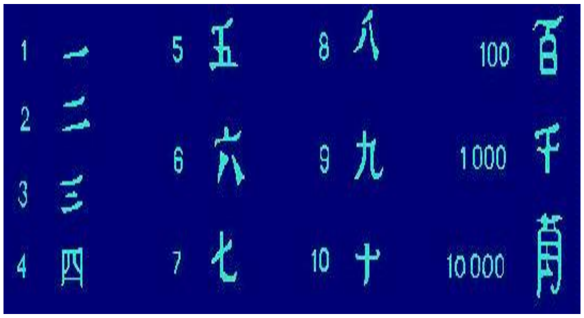
El primer sistema de numeración griego se desarrolló hacia el 600 A.C. Era un sistema de base decimal que usaba los símbolos de la figura siguiente para representar esas cantidades. Se utilizaban tantas de ellas como fuera necesario según el principio de las numeraciones aditivas.

Los símbolos de 50, 500 y 5000 se obtienen añadiendo el signo de 10, 100 y 1000 al de 5, se usó un principio multiplicativo. Progresivamente este sistema ático fue reemplazado por el jónico, que empleaba las 24 letras del alfabeto griego.



De esta forma los números parecen palabras, ya que están compuestos por letras, y a su vez las palabras tienen un valor numérico, basta sumar las cifras que corresponden a las letras que las componen.
Esta circunstancia hizo aparecer una nueva suerte de disciplina mágica que estudiaba la relación entre los números y las palabras. En algunas sociedades como la judía y la árabe, que utilizaban un sistema similar, el estudio de esta relación ha tenido una gran importancia y ha constituido una disciplina aparte: la kábala, que persigue fines místicos y adivinatorios.

2.3 SISTEMA DE NUMERACIÓN CHINA

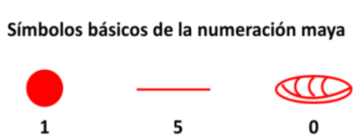
	La escritura de los números en China se empezó a usar desde el 1500 A.C. Es un sistema decimal estricto que usa las unidades y los distintas potencias de 10. Utiliza los ideogramas de la figura y usa la combinación de los números hasta el diez con la decena, centena, millar y decena de millar para según el principio multiplicativo representar 50, 700 ó 3000. El orden de escritura se hace fundamental, ya que 5 10 7 igual podría representar 57 que 75.
	Tradicionalmente se ha escrito de arriba abajo aunque también se hace de izquierda a derecha como en el ejemplo de la figura. No es necesario un símbolo para el cero siempre y cuando se pongan todos los ideogramas, pero aún así a veces se suprimían los correspondientes a las potencias de 10.

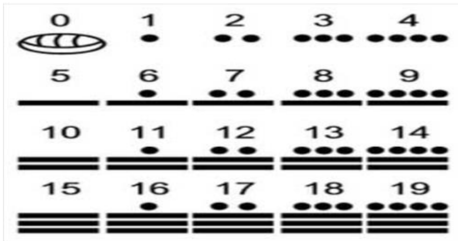
2.4 SISTEMA DE NUMERACIÓN MAYA

Los mayas idearon un sistema de numeración como un instrumento para medir el tiempo y no para hacer cálculos matemáticos.

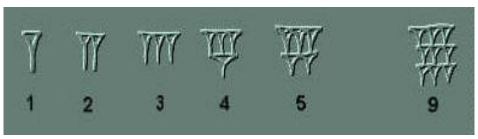
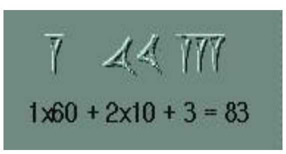
Los números mayas tienen que ver con los días, meses y años, y con la manera en que organizaban el calendario.

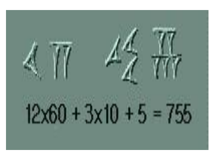
Los mayas tenía tres modalidades para representar gráficamente los números del 1 al 19, así como del cero: un sistema numérico de puntos y rayas; una numeración cefalomorfa «variantes de cabeza»; y una numeración antropomorfa, mediante figuras completas.

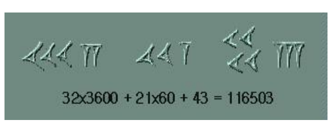
	Los mayas tuvieron un conocimiento matemático muy desarrollado, fueron los primeros pueblos en el mundo en descubrir y utilizar el número cero que representaban con este símbolo
	Fue la primera civilización que desarrolló un sistema posicional. Esto es, un sistema matemático en el que el valor de una cifra vale según su posición La cifra menor queda abajo. Los tres **símbolos básicos** eran **el punto**, cuyo **valor es uno**; **la raya**, cuyo **valor es cinco**; y el **caracol**, cuyo **valor es cero**.

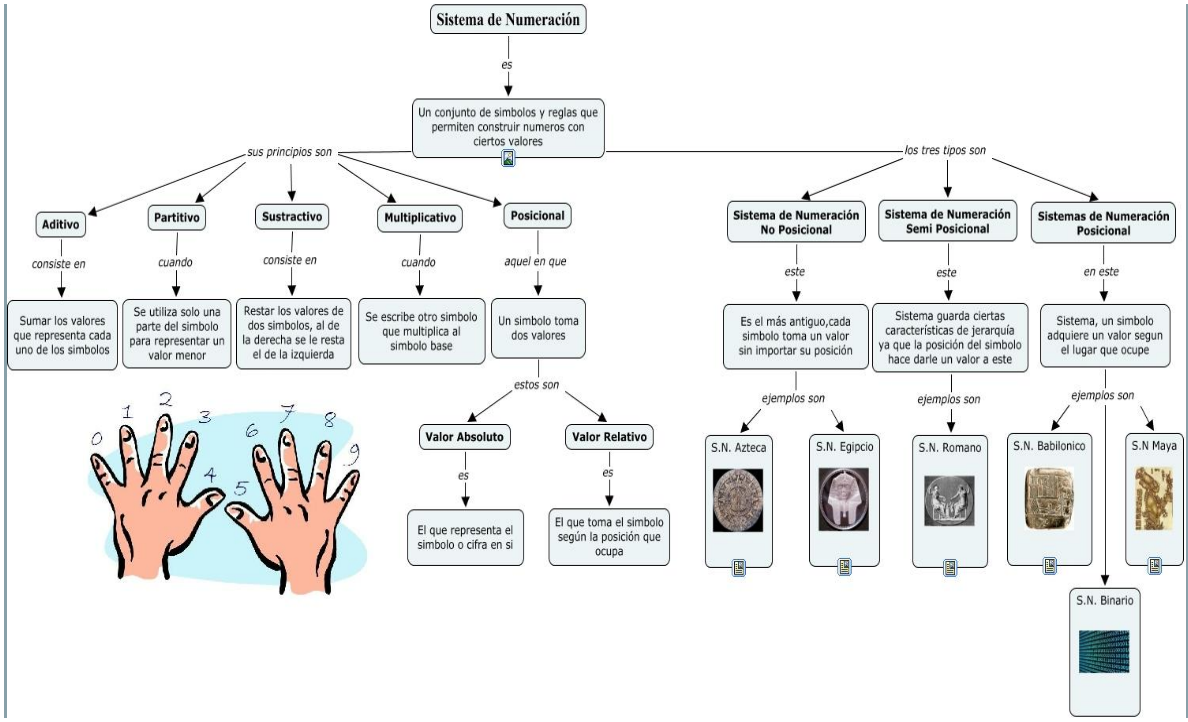
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>El sistema de numeración maya las cantidades son agrupadas de 20 en 20. De ahí que se le llame sistema vigesimal porque su base es el número 20.
En el sistema de numeración maya las cantidades son agrupadas de 20 en 20; por esa razón en cada nivel puede ponerse cualquier número del 0 al 19. Al llegar al veinte hay que poner un punto en el siguiente nivel; de este modo, en el primer nivel se escriben las unidades, en el segundo nivel se tienen los grupos de 20 (veintenas), en el tercer nivel se tiene los grupos de 20×20 y en el cuarto nivel se tienen los grupos de 20×20×20.</td>
</tr>
</table>

2.5 SISTEMA DE NUMERACIÓN BABILÓNICA

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Se inventó un sistema de base 10, aditivo hasta el 60 y posicional para números superiores.
Para la unidad se usaba la marca vertical que se hacía con el punzón en forma de cuña. Se ponían tantos como fuera preciso hasta llegar a 10, que tenía su propio signo.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>De esta manera se completaba con las unidades hasta llegar a 60.</td>
</tr>
<tr>
<td>




</td>
<td>Observemos la representación de 83, 756 y 116 503.
Los grupos de signos iban representando en forma sucesiva el número de unidades 60, 60 x 60, 60 x 60 x 60.</td>
</tr>
</table>



3. HISTORIA DE LOS NÚMEROS RACIONALES Y LOS NÚMEROS IRRACIONALES.

3.1 NÚMEROS RACIONALES

Los números racionales aparecieron en la historia de la matemática debido a la necesidad de resolver un problema en la vida cotidiana, se dieron cuenta que los números naturales no eran suficientes para hacer mediciones, ya que eran susceptibles en la realización de divisiones más pequeñas que la unidad o divisiones mayores que la misma y estos números no eran números naturales. Estos problemas de vida cotidiana que se enfrentaron y aparecen números racionales son: medir longitudes, áreas, tiempo, pesos y todo otro tipo de medidas.

Uno de los primeros textos antiguos matemáticos de los que hay constancia, donde aparecen las fracciones es el Papiro Rhind de Egipto, escrito hacia el 1650 a.C. y es la fuente de conocimiento de la matemática egipcia.

	Un documento conocido como "**el Papiro de Rhind**" o "**el Papiro de Ahmes**", de unos 3800 años de antigüedad, contiene una recopilación de unas 87 cuestiones matemáticas. El papiro, que mide unos seis metros de longitud y 33 cm de ancho, se encuentra en muy buen estado de conservación y es considerado un verdadero tesoro.

En Occidente los musulmanes introdujeron su sistema de numeración, conocido como indoarábigo. Este paso fue clave para la comprensión y el estudio de los números racionales en la vieja Europa.

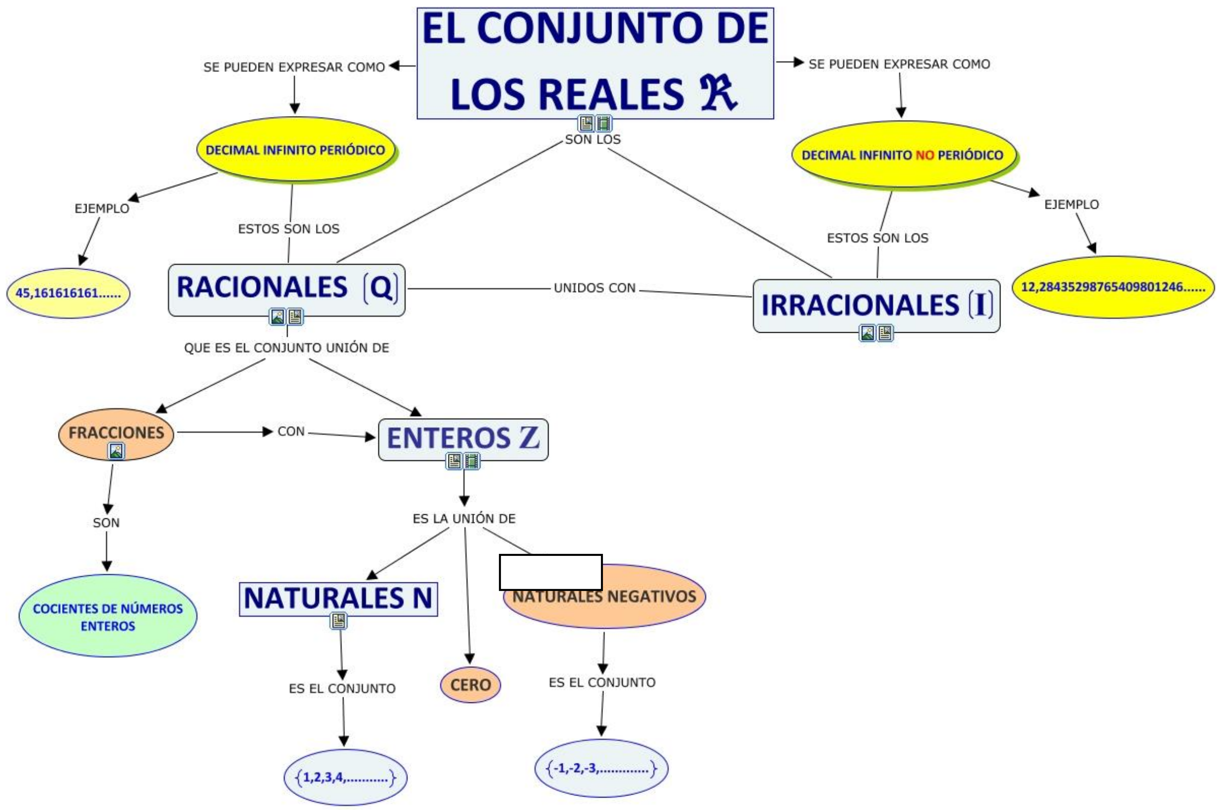
En el S. XIII Leonardo de Pisa, más conocido por su apodo Fibonacci, introdujo el concepto de números quebrados o números "ruptus", empleando además la raya para separar el numerador del denominador.

3.2 NÚMEROS IRRACIONALES

La idea de número irracional apareció en la geometría con los antiguos griegos cuando observaron que los números racionales no completaban la recta. El primero en comprobarlo fue el filósofo y matemático griego Pitágoras de Samos (582 a.C. – 507 a.C.), quien estudió un triángulo rectángulo con catetos de longitud uno, y observó que la longitud de la hipotenusa del triángulo no podía tenía un valor racional, demostrando con este hallazgo la no completitud de los números racionales y la existencia de unos números hasta entonces desconocidos.

La Escuela Pitagórica llamó a estos números inconmensurables. Al principio la aparición de estos números "desconocidos" desconcertó a los miembros de la Escuela Pitagórica, la existencia de los irracionales ponía en evidencia que muchas suposiciones y demostraciones de la geometría eran falsas o estaban incompletas.
Los Pitagóricos llegaron a plantearse el mantener en secreto estos números que contradecían su doctrina, "la adoración del número como ente perfecto que gobernaba el universo y todo lo que en él existía".

Tres siglos después de su descubrimiento, Euclides en su obra "Los Elementos" trata el tema de los números irracionales, y llega a demostrar que la raíz cuadrada de dos no puede ser un número racional.



4. NÚMEROS PRIMOS Y NÚMERO COMPUESTO

Un número natural distinto de 1 es un *número primo* si sólo tiene dos divisores, él mismo y la unidad.
Un número natural es un *número compuesto* si tiene otros divisores además de él mismo y la unidad.
Ejemplos: 19 es un número primo porque sus únicos divisores son 1 y 19.
24 es un número compuesto porque sus divisores son 1, 2, 3,4,6, 12 y 24

5. CRIBA DE ERATÓSTENES

En esta actividad se utiliza un método que se conoce como Criba de Eratóstenes, que consiste en eliminar metódicamente, de la totalidad de números inferiores a uno dado, todos los números que no son primos o sea los números compuestos, que son aquellos que tienen más de dos divisores. Calculemos los números primos del 1 al 100.

Actividad 

Construye la tabla de los números primos menores que 100.

Para ello, sigue estos pasos:

1.° A partir del 2, tacha los múltiplos de 2.

2.° A partir del 3, tacha los múltiplos de 3.

3.° A partir del 5, tacha los múltiplos de 5.

4.° A partir del 7, tacha los múltiplos de 7.

5.° A partir del 11, tacha los múltiplos de 11.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- ¿Qué observas al aplicar el paso 5.°?
- ¿Cuántos números primos hay menores que 100?

6. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

N ÚMERO DIVISIBLE POR:	REGLA	EJEMPLOS:
2	Si termina en 0 ó en cifra par.	Ejemplos 80; 202; 35736;
3	Si la suma de sus cifras es múltiplo de tres.	Ejemplos: 612 (dado que 6 + 1+ 2 = 9); 9 es un múltiplo de 3; (3x3=9)
4	Las últimas dos cifras son un número divisible por 4.	31**12** es (12:4=3)
5	Si termina en 0 o en 5.	Ejemplos 45; 90; 1565.
6	El número es divisible por 2 y 3	114 (es par, y 1+1+4=6 y 6÷3 = 2 418 termina en par es divisible por 2 , pero 4 + 1 + 8 = 13 y 13 no es múltiplo de 3.
7	si doblas la última cifra y la resta del resto del número, y el resultado es divisible por 7. (Nota: puedes aplicar esta misma regla a la solución de la operación)	602 , el doble de 2 es 4, 60 - 4 = 56 , 56 : 7= 8 **Sí** 905 (el doble de 5 es 10, 90 - 10=80, y 80:7=11,42857) **No**
8	Las tres últimas cifras son un número divisible por 8.	109**816** , 816 : 8 = 102
9	la suma de las cifras es divisible por 9. (Nota: puedes aplicar la regla otra vez a la respuesta. Como en el caso del 7)	6192 , sumemos los dígitos 6 + 1 +9 + 2 = 18 y otra vez, 1+ 8 = 9 **Sí** 2013 (2+0+1+3=6) **No**
10	El número termina en 0.	240
25	Además del 0, son divisibles por 25 todos los números cuyas dos últimas cifras son: 00, 25, 50, 75	Los números 100, 325, 450, 1575 son divisibles por 25

Actividad. 

Aplica las reglas enunciadas y justificadas en clase y resuelve la siguiente actividad.
1. Indica con una cruz la casilla correspondiente cuando el número sea divisible por el que encabeza la columna correspondiente.

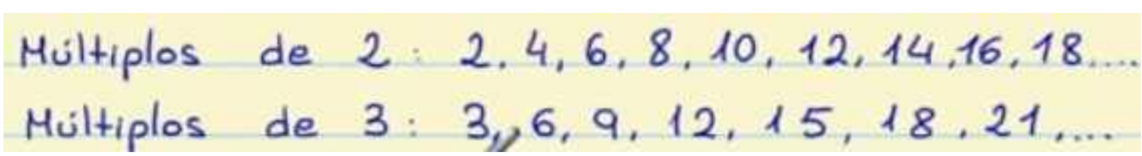
Número	2	3	4	5	6	9	10	25
144								
306								
360								
396								
1800								
2365								
22220								
444444								
540084								

2. Escribe 6 números que sean simultáneamente divisibles por 6 y por 9.
3. Escribe cuatro números que sean simultáneamente divisibles por 5, 3 y 10
4. Escribe tres números que sean divisibles por 9 y no lo sean por 6.

5. ¿Cuál cifra puedes colocar en el ☐ para que 1 ☐ 1 sea divisible por 3 ?
¿Puedes colocar otra cifra? ¿Cuáles?
6. ¿Cuál cifra puedes colocar en el ☐ para que 81 ☐ 2 sea divisible por 4 ?
¿Puedes colocar otra cifra? Cuáles?

7. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

El **mínimo común múltiplo (m. c. m.)** de dos o más números es el menor múltiplo común distinto de cero.
Veamos un ejemplo:
Encontrar el mínimo común múltiplo de 2 y 3
Primero encontramos los múltiplos de 2 y de 3



Los múltiplos que tienen en común el dos y el tres son: **6, 12, 18,….** Hay que tener en cuenta que los múltiplos son infinitos y que nosotros solo hemos mostrados los primeros de cada número. El mínimo común múltiplo o m.c.m. es **6**, ya que es el menor de los múltiplos comunes.

- Veamos otra forma de encontrar el m.c.m. de dos o más números.

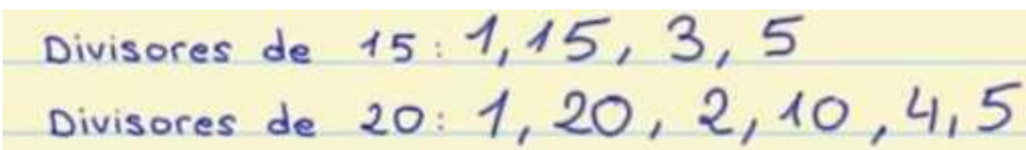
Para hallar el mínimo común múltiplo de dos o más números debemos descomponer los números en factores primos.

Ejemplo: Halle el m. c. m. (30, 36, 60)

30 - 36 - 60	2	Se colocan las cantidades de menor a mayor. Se empieza con el primer número primo que divida a alguna de estas cantidades, en este ejemplo es el 2. Si todavía una de las cantidades se pueda dividir por este número primo (2) se sigue, en caso contrario se continúa con el siguiente número primo, en este caso el 3 y así sucesivamente. Luego multiplicamos los factores primos 2 x 2 x 3 x 3 x 5= 180, es el m.c.m
15 - 18 - 30	2	
15 - 9 - 15	3	
5 - 3 - 5	3	
5 - 1 - 5	5	
1 - 1 - 1		

8. MÁXIMO COMÚN DIVISOR

El máximo común divisor, m.c.d. de dos o más números es el mayor número que divide exactamente a dos o más números. Encontremos el m.c.d. de 15 y 20
Primero encontremos los divisores de 15 y de 20:



Los divisores comunes de 15 y 20 son 1 y 5. Y el mayor de estos divisores comunes o el m.c.d. es **5.**

- Veamos otra forma de encontrar el m.c.d. de dos o más números.

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se toman los factores comunes con el menor exponente.

Ejemplo: encontrar el m.c.d.de 12, 18 y 24

12	2		18	2		24	2	
6	2		9	3		12	2	
3	3	2^2x3	3	3	$2x3^2$	6	2	2^3x3
1			1			3	3	
						1		

El m.c.d.de 12, 18 y 24 es: 2x3 = 6

Actividad 

I. Parte. Halle el m.c.m y m.c.d. de los siguientes números:

1) 30, 60,120	3) 180, 252 y 594
2) 140, 325, 490	4) 60, 100

II Parte. Resuelva los siguientes problemas utilizando el concepto de m.c.m y/o m.c.d.

1) Andrés tiene en su tienda los botones metidos en bolsas. En la caja A tiene bolsitas de 24 botones cada una y no sobra ningún botón. En la caja B tiene bolsitas de 20 botones cada una y tampoco sobra ningún botón. El número de botones que hay en la caja A es igual que el que hay en la caja B. ¿Cuántos botones como mínimo hay en cada caja?

2) Un viajante va a Chiriquí cada 18 días, otro va a Chiriquí cada 15 días y un tercero va a Chiriquí cada 8 días. El día 10 de marzo han coincidido en Chiriquí los tres viajantes, cuándo vuelven a coincidir los tres viajeros en Chiriquí?

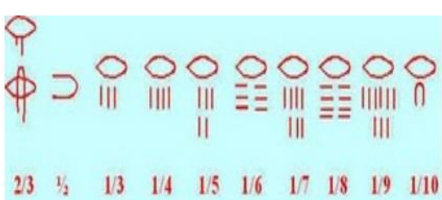
3) Mayra y Nathan tienen 25 bolas rojas, 15 bolas verdes y 90 bolas amarillas y quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna bola.

a) ¿Cuántos collares iguales pueden hacer?
b) ¿Qué número de bolas de cada color tendrá cada collar?

4) Lenn tiene un reloj que da una señal cada 60 minutos, otro reloj que da una señal cada 150 minutos y un tercero que da una señal cada 360 minutos. A las 10 de la mañana los tres relojes han coincidido en dar la señal. a) ¿Cuántas horas, como mínimo, han de pasar para que vuelvan a coincidir? b) ¿A qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos.

9. LAS FRACCIONES

Las fracciones, también conocidas con el nombre de “quebrados”, ya eran conocidas por babilonios, egipcios y griegos. Pero el nombre de fracción se lo debemos a Juan de Luna, que tradujo al latín, en el siglo XII, el libro de aritmética de Al-Juarizmi. De Luna empleó la palabra «fractio» para traducir la palabra árabe «al-Kasr», que significa quebrar, romper.

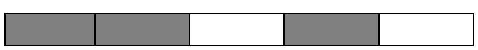
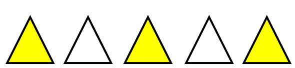
	Se cree que las fracciones surgieron en el Antiguo Egipto, al tener que repartir panes entre personas pero cuando había más personas que panes los egipcios sólo utilizaban fracciones unitarias (cuyo denominador es 1) y una a la que daban un simbolismo especial, la fracción $\frac{2}{3}$.

Se considera que fueron los egipcios quienes utilizaron por primera vez las fracciones, pero sólo aquéllas de la forma 1/n o las que pueden obtenerse como combinación de ellas. Es decir, Los egipcios utilizaron las fracciones cuyo numerador es 1 y cuyo denominador es 2, 3, 4,..., y las fracciones 2/3 y ¾ consiguiendo hacer cálculos fraccionarios de todo tipo. Los egipcios resolvían	Los babilonios fueron los primeros en utilizar una notación racional expresando los números de forma parecida a la actual.

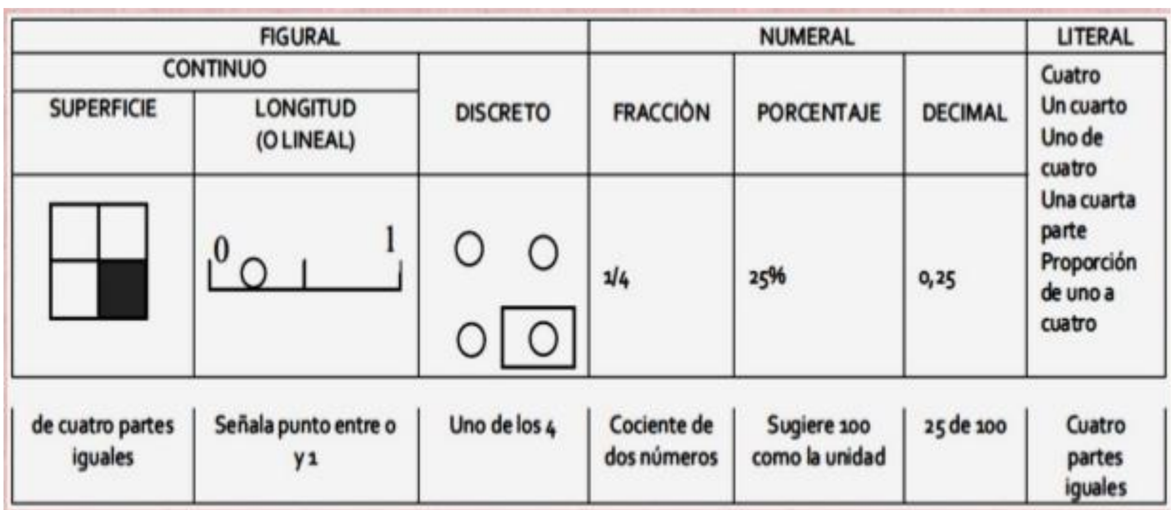
La expresión de una fracción poniendo el numerador arriba y el denominador abajo se la debemos a los hindúes, pero ellos no ponían entre ambos la raya horizontal que ponemos en la actualidad, esa raya se la debemos a los árabes.

10. SIGNIFICADO DE FRACCIÓN

El nombre de fracción se lo debemos en parte a Juan de Luna, que lo tradujo del latín en el siglo XII, del libro de aritmética de Al-Juarismi. Aquel utilizó la palabra **“fractio”** para traducir la palabra árabe “al-Kasr”, que significa **quebrar, romper.**
Interpretaciones del concepto de fracción.

1. La fracción como parte de una unidad Se toma un todo como unidad. En este caso la fracción representa un valor con relación al todo. Ejemplo: $\frac{3}{5}$ quiere decir, que de las cinco partes que son el todo, se toman tres partes. Fracción continua  fracción discreta  Según los estudios de Piaget, Inhelder, Szeminska de 1.960 [24], la noción de fracción desde la relación parte-todo, se fundamenta en siete atributos básicos: *a. Un todo está formado por elementos separables.* *b. La unidad “todo” se puede dividir en un número de partes determinado.* *c. La reunión de todas las partes forman la unidad “todo”.* *d. El número de partes no es igual al número de cortes.* *e. Las partes iguales, deben ser congruentes.* *f. Las partes se pueden considerar a su vez como unidad “todo”.* *g. La unidad “todo” se conserva*	En esta replantación de canicas no son iguales en sus colores, pero si en tamaño, así que las “partes iguales” se refieren a cantidades de canicas, es decir, lo que se conceptualiza hace referencia a cantidades, números y no a objetos concretos.  En la figura se representa $\frac{1}{5}$ del todo 2. La fracción como cociente Se toma la fracción como el cociente indicado entre dos números naturales. Ejemplo: Se requiere repartir B/ 12000 entre 4 personas. ¿Cuánto le toca a cada uno? La repartición se encuentra al dividir doce mil entre cuatro y se expresa como $\frac{12000}{4}$ el resultado es 3000 3. La fracción como razón y proporción

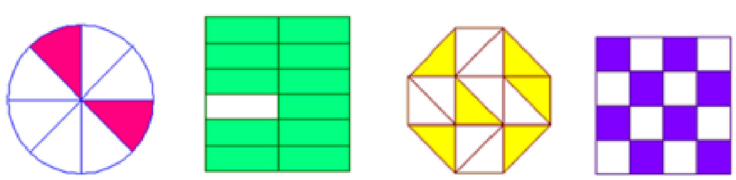
 En estas canicas son del mismo tamaño y color, cada una de ellas son partes iguales-	Se presenta cuando se comparan dos cantidades de una misma magnitud, se están usando las fracciones como razones. Ejemplo: La razón de niñas y niños en u colegio X es de 4 a 3, estamos diciendo que por cada 4 niñas hay 3 niños. 4. La fracción como operador Se presenta cuando se toma la fracción como un operador multiplicativo de un número natural. Ejemplo: ¿ Cuánto es $\frac{4}{5}$ de B/ 150 ? $\frac{4}{5}$ x (150) = 120



FIGURAL			NUMERAL			LITERAL
CONTINUO						
SUPERFICIE	LONGITUD (O LINEAL)	DISCRETO	FRACCIÒN	PORCENTAJE	DECIMAL	Cuatro Un cuarto Uno de cuatro Una cuarta parte Proporción de uno a cuatro
	0 1		1/4	25%	0,25	
de cuatro partes iguales	Señala punto entre 0 y 1	Uno de los 4	Cociente de dos números	Sugiere 100 como la unidad	25 de 100	Cuatro partes iguales

11. CONTEXTO CONTINUO Y CONTEXTO DISCRETO EN LAS FRACCIONES

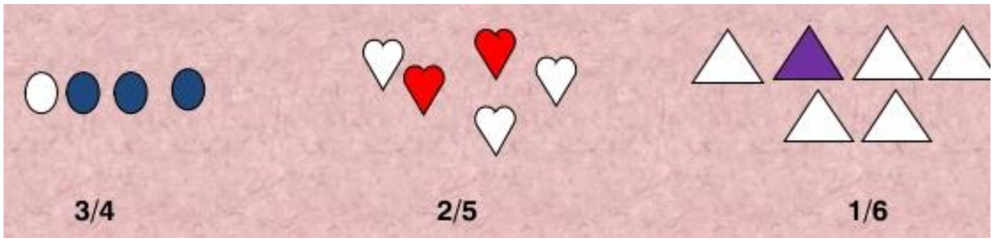
Cuando se habla de un <u>*contexto continuo*</u>, para la enseñanza de las fracciones se relacionan con el concepto de área o de longitud, es decir que corresponden a magnitudes cuya medida está asociada con los números reales.
En el contexto continuo en las fracciones es fundamental el concepto de “dividir” en partes “iguales”; en el caso de las regiones planas es dividen en partes “congruentes” esto significa dividir en partes de “igual tamaño”, es decir de “igual área”.



Representación gráfica de fracciones en el contexto continuo

Cuando se menciona las fracciones en los contextos discretos, en la educación básica se enfatiza a conjuntos con elementos que se representan gráficamente en forma separada, es decir, a esos elementos se le asocia con elementos del conjunto de los números naturales (discreto).

Para una mejor comprensión una unidad puede ser un conjunto con 4 pelotas de beisbol, o 16 lápices, 5 corazones, 6 triángulos, 5 granos e maíz, etc.



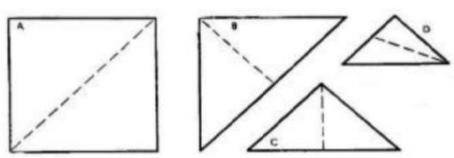
Representación gráfica de fracciones en el contexto discreto

Recuerde a los estudiantes explicarle qué fracción de la representación gráfica desea que se lo escriba numéricamente, la parte coloreada o la de sin colorear. En nuestro ejemplo se representa la parte coloreada.

Los estudiantes deben realizar asociaciones entre los modelos gráficos, la escritura, la lectura y la representación simbólica de la forma $\frac{m}{n}$.

Actividad. 

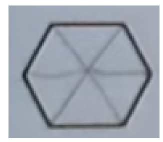
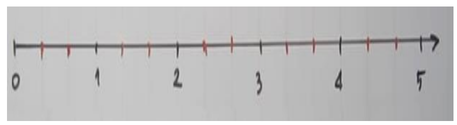
1. Toma una hoja 8 ½ cm por 11 cm, y realiza representaciones de ½.
2. En una hoja cuadrada de 10 cm de lado, realiza cuatro dobleces por la mitad, dobla siempre por la parte punteada. ¿Cuántas partes de igual tamaño se forman al desdoblar la hoja? ¿Qué fracción de la hoja cuadrada es cada una de las partes? ¿Cuál es el área de cada una de las partes ?.



Completa la tabla, con los dobleces que se le pide.

Dobleces	Partes

3. En cada uno de los siguientes ejercicios escriba cuántos cortes se hicieron y cuántas partes se generaron:

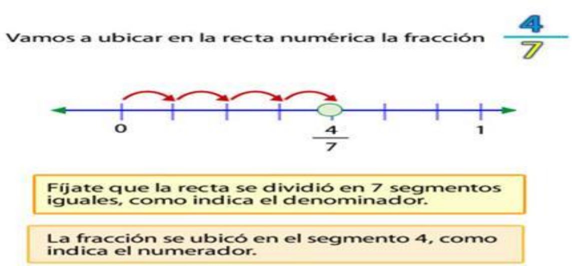
Gráfica	Cortes	Partes	Gráfica	Cortes	Partes
					
					
					

12. UBICACIÓN DE FRACCIONES EN LA RECTA NÚMERICA

Las fracciones también se pueden representar en la recta numérica. Para ubicar fracciones propias en la recta numérica se **divide la unidad en partes iguales (segmentos)**, según indica el denominador,
Ubicamos la facción en la recta numérica según indica el numerador

Ejemplo

Ubiquemos en la recta numérica la fracción $\frac{4}{7}$
Dividimos la recta en 7 segmentos iguales (según indica el denominador)
Ubicamos la fracción en el segmento 4 (según indica el numerador)



Existen dos formas de representar una fracción impropia en la recta numérica:

1. <u>Directamente</u>

Dividimos todos los números enteros de la recta numérica en partes o segmentos (según el número que indica el denominador)

Empezando desde 0 contamos el número de veces que nos indica el numerador y ubicamos la fracción.

2. <u>Transformando la fracción impropia a número mixto</u>

Recuerda que para pasar una fracción impropia a número mixto debes dividir el numerador de la fracción entre el denominador.

Al convertirlas en número mixto, el entero que se obtiene nos indica entre que números enteros está la fracción impropia, y la fracción que nos resulta se ubica entre dichos números.

Ejemplo

Vamos a ubicar en la recta numérica la fracción $\frac{5}{3}$

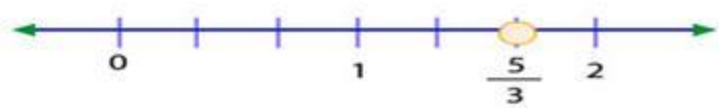
<u>Directamente</u>

a. Marcamos en la recta numérica números enteros.

b. Dividimos cada número entero en 3 partes o segmentos (según indica el denominador).

c. Contamos desde 0 hasta 5 los segmentos (según indica el numerador).

d. Ubicamos la fracción en el 5º segmento.

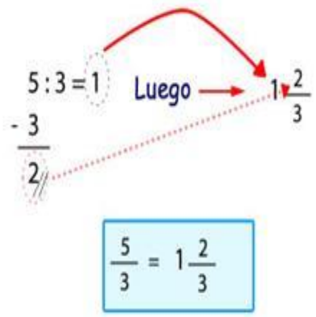


<u>Transformando la fracción impropia a número mixto</u>

Paso 1. Convertimos la fracción $\frac{5}{3}$ en número mixto.

Recuerda *Dividimos el numerador entre denominador y comprobamos cuántos enteros nos da y cuánto es el resto.* *5 ÷ 3 = 1; el resto = 2* *1 —— partes enteras* *2 —— nuevo numerador* *El denominador se mantiene igual que en este caso es 3*

El entero 1 nos indica que la fracción está entre el 1 y el 2.



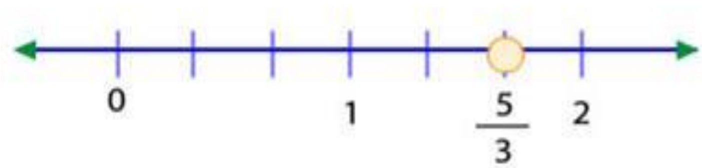
Paso 2. Ubicamos la fracción original en la recta numérica

a. Marcamos en la recta numérica números enteros.

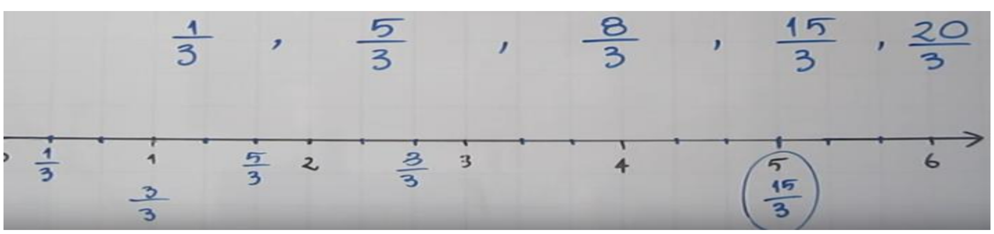
b. Dividimos cada número entero en 3 partes o segmentos (según indica el denominador).

presentación de fracciones mediante gráficos:

c. Ubicamos la fracción $\frac{5}{3}$ en la recta numérica entre los enteros 1 y 2 en el 2º segmento.

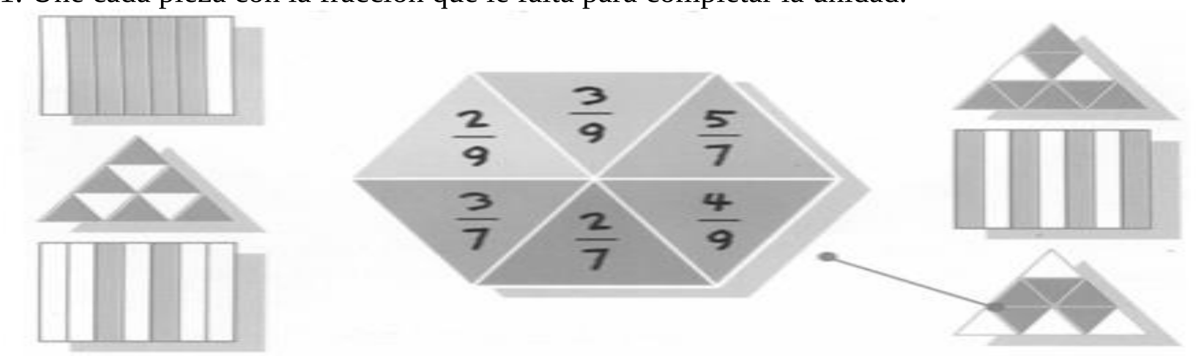


Vea estos otros ejemplos



Actividad

1. Une cada pieza con la fracción que le falta para completar la unidad.



13. COMPARACIÓN DE FRACCIONES.

13. 1 FRACCIONES CON IGUAL DENOMINADOR

De dos fracciones que tienen el mismo denominador es menor la que tiene menor numerador.

$$\frac{4}{12} < \frac{7}{12}$$

13.2 Fracciones con igual numerador

De dos fracciones que tienen el mismo numerador es menor el que tiene mayor denominador.

$$\frac{4}{12} < \frac{4}{9}$$

13.2 Con numeradores y denominadores distintos

En primer lugar las tenemos que poner a común denominador.

$$\frac{4}{5},\ \frac{4}{9},\frac{2}{3}$$

Buscamos el m.c.m (3,5,9) = 45, cada fracción la trasformamos en fracción equivalente

$$\frac{4}{5},\quad \frac{4}{9},\quad \frac{2}{3}$$

$$\frac{36}{45}, \frac{20}{45}, \frac{30}{45}$$

Es menor la que tiene menor numerador.

$$\frac{4}{9} = \frac{20}{45}$$

Actividad 

1. Ordenar de menor o mayor las siguientes fracciones

a) $\frac{5}{9}, \frac{8}{12}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}$

b) $\frac{3}{11}, \frac{8}{11}, \frac{2}{11}, \frac{1}{11}$

14. OPERACIONES CON FRACCIONES

14.1. ADICIÓN DE FRACCIONES

14.1.1 CON IGUAL DENOMINADOR

Si dos fracciones tiene el mismo denominador, se suman los numeradores y se deja el mismo denominador. Si la fracción resultado se puede simplificar, se simplifica.
Ejemplo:

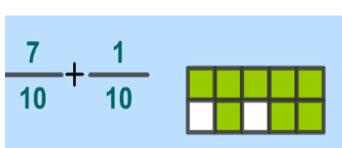
$$\frac{5}{7} + \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

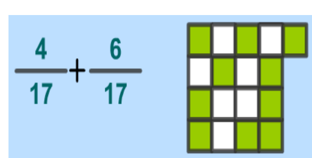
14.1.2. CON DISTINTO DENOMINADOR

Si las fracciones tienen distinto denominador se reducen a común denominador y se suman los numeradores dejando el denominador. Finalmente, si es posible se simplifica.
Ejemplo:

$$\frac{5}{4} + \frac{1}{6} = \frac{15+2}{12} = \frac{17}{12}$$

A continuación se representa gráficamente la suma de fracciones homogéneas





14.2- RESTA O SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES

14.2.1- CON IGUAL DENOMINADOR

Si dos fracciones tiene el mismo denominador, se restan los numeradores y se deja el mismo denominador. Si la fracción resultado se puede simplificar, se simplifica.

Ejemplo: $$\frac{5}{7} - \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$$

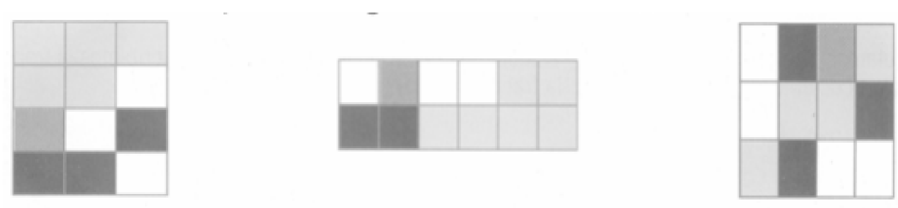
14.2.2- CON DISTINTO DENOMINADOR

Si las fracciones tienen distinto denominador se reducen a cumún denominador y se restan los numeradores dejando el denominador. Finalmente, si es posible se simplifica.

Ejemplo: $$\frac{5}{4} - \frac{1}{6} = \frac{15 - 2}{12} = \frac{13}{12}$$

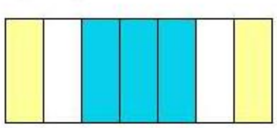
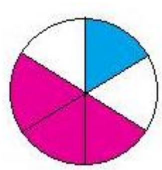
Actividad 

1. Relaciona cada suma con su representación gráfica. Calcula su resultado.



$\frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{...}{...}$ $\frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{...}{...}$ $\frac{1}{12} + \frac{6}{12} + \frac{2}{12} = \frac{...}{...}$

2. Completa la resta de fracciones

— + — = — —+ —=—

3. Problemas de adicción y sustracción de fracciones

1. Andrés y Jaime compraron una torta. Andrés se comió $\frac{1}{5}$.
y Jaime se comió el resto. Quién de los dos comió más?
¿Cuántos más?____

2. Diana y Sonia están pintando un mural. Diana ha pintado $\frac{2}{7}$ y Sonia $\frac{3}{7}$.
¿Qué fracción del mural han pintado entre las dos?____

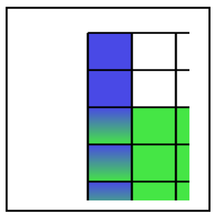
3. Luis y Ana están armando un rompecabezas de 24 piezas. Ana armó 12 piezas y Luis 9 piezas.
¿Qué fracción del rompecabezas han armado?___
¿Qué fracción del rompecabezas les falta por armar?___

4. La semana pasada Diana leyó $\frac{3}{5}$ del un libro y en esta semana ha leído $\frac{1}{7}$, ¿Qué fracción del libro ha leído?___

5. Dos tercios de los pupitres de un salón de clase están pintados de rojo, un cuarto están de azul y el resto están pintados de verde. ¿Qué fracción de pupitres está pintada de verde?____

14.3 MULTPLICACIÓN DE FRACCIONES

La multiplicación en forma gráfica es más sencilla si la representamos como unidad (rectángulo), se grafica la primera fracción que se va a multiplicar; y luego por la otra longitud del rectángulo-unidad se grafica la otra fracción; las partes intersecadas por estas dos divisiones, corresponden a la respuesta de la multiplicación de fracciones,



Recuerde:

Hay 3 simples pasos para multiplicar fracciones

1. Multiplica los números de arriba (los *numeradores*).

2. Multiplica los números de abajo (los *denominadores*).

3. Simplifica la fracción.

Actividad

Explique el proceso de multiplicar fracciones para estos ejemplos.

$\frac{2}{3} \times \frac{2}{7} = \square$

$\frac{5}{7} \times \frac{1}{2} = \square$

14.4. DIVISIÓN DE FRACCIONES

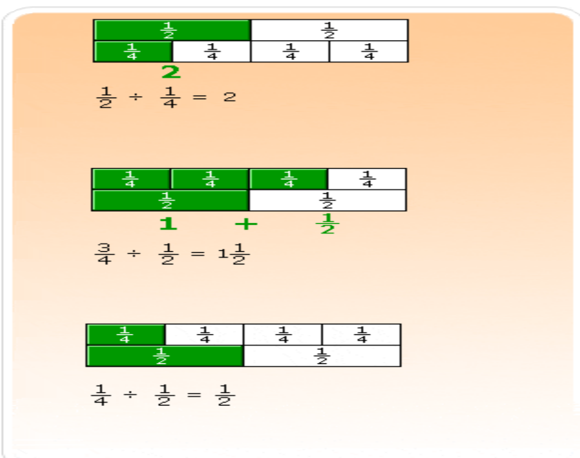
Para dividir dos fracciones, se multiplica el dividendo por el **recíproco** del divisor.

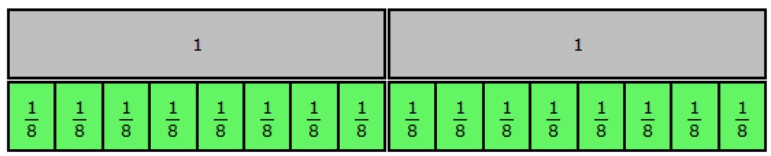
Ejemplo: dividir $\frac{3}{7}$ entre $\frac{2}{3}$

$$\frac{3}{7} \div \underbrace{\frac{2}{3} = \frac{3}{7} \times \frac{3}{2}}_{\text{recíproco}} = \frac{9}{14}$$

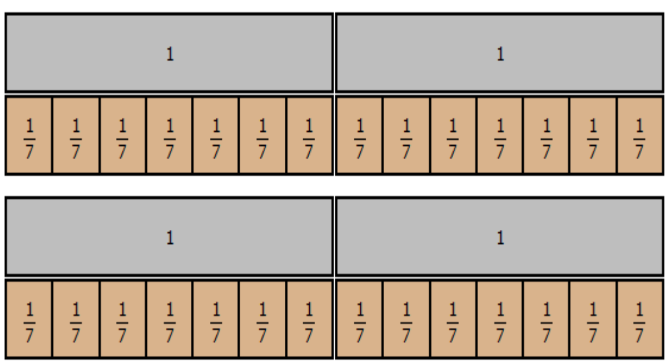
Actividad. 

1. Dadas las siguientes representaciones de división de fracciones, observe y Comente con su grupo sobre su procedimiento en forma grafica.





$2 \div \frac{1}{8} = \square$



$4 \div \frac{1}{7} = \square$

Problema resuelto

Isabel debe repartir $\frac{3}{4}$ de una barra de chocolate en partes iguales entre 3 niños: Daniela, Diego e Ignacio.
¿Qué fracción del chocolate le corresponde a cada niño?

Solución

A cada niño le tocará la tercera parte de la porción de chocolate que se repartió

Esto puede resumirse en el siguiente esquema:

Procedimiento:

Se debe repartir $\frac{3}{4}$ en 3 partes iguales, por lo tanto debo dividir $\frac{3}{4}$ por 3

Operación y resultado:

$\frac{3}{4} : 3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

Respuesta:
Cada niño recibió la cuarta parte de la barra de chocolate

Realiza las siguientes operaciones:

1. $\frac{3}{8} : 3 =$
2. $\frac{3}{5} : 4 =$
3. $\frac{6}{7} : 5 =$
4. $\frac{7}{8} : 8 =$
5. $\frac{2}{3} : 9 =$
6. $\frac{13}{15} : 6 =$

Resuelve los siguientes problemas indicando en cada caso:

(a) El procedimiento.
(b) La operación con su resultado.
(c) La respuesta del problema.

Problema 1:
Si Anita reparte $\frac{3}{4}$ de una torta en partes iguales entre sus 3 hijos, ¿qué fracción de la torta le corresponde a cada niño?

Problema 2:
Don Domingo quiere repartir la mitad de un terreno en partes iguales entre sus 3 hijos. ¿Qué parte del terreno le corresponde a cada hijo?

Problema 3:
Una profesora repartió un cuarto kilo de galletas entre los 5 alumnos que contestaron bien un problema. ¿Qué fracción de un kilo de galletas recibió cada uno de estos alumnos?

Problema 4:
Don Manuel debe repartir las $\frac{3}{8}$ partes de las ganancias que obtuvo su empresa, en partes iguales entre los 13 empleados que trabajan para él. ¿Qué parte de las ganancias le corresponde a cada empleado?

Problema 5:
Para una reunión con sus amigos Daniel quiere preparar 3 pizzas. Si tiene $\frac{7}{8}$ kilo de queso, ¿con qué cantidad de queso queda cada pizza si lo gasta todo y a todas le pone la misma cantidad?

15. RAZONES

Razón de dos cantidades es el resultado de comparar dos cantidades. Dos cantidades pueden compararse de dos maneras. Hallando en cuánto excede una a la otra, es decir, restándolas, o hallando cuántas veces contiene una a la otra, es decir, dividiéndolas. De aquí que haya dos clases de razones: razón aritmética o por diferencia y razón geométrica o por cociente.

<u>Razón aritmética o por diferencia de dos cantidades</u> es la diferencia indicada de dichas cantidades.

La razones aritmética se pueden escribir de dos maneras: separando las dos cantidades con el signo " – " o con un punto " · ".
Así, la razón aritmética de 2 a 5 se escribe: $2 - 5$ ó $2 \cdot 5$ y se lee dos es a 5.
Los términos de una razón aritmética se llaman: antecedente el primero y consecuente el segundo. Así en la razón aritmética $2 - 5$ el antecedente es 2 y el consecuente es 5.

<u>Razón geométrica o por cociente de dos cantidades</u> es el cociente indicado de dichas cantidades. Las razones geométricas se pueden escribir de tres maneras: En forma de fracción, separadas las cantidades por el signo de división (÷) o con dos puntos o el signo de razón (:).
Así, la razón geométrica de 4 y 6 se escribe: $\frac{4}{6}$; $4 \div 6$; o bien 4 : 6 y se lee " cuatro es a seis ".
Los términos de la razón geométrica se llaman antecedente el primero y consecuente el segundo.

Observación:
A continuación, cuando se diga simplemente razón se entenderá que la razón pedida es geométrica.
No hay que confundir razón con fracción. Si $\frac{a}{b}$ es una fracción, entonces a y b son números enteros con b≠ 0, mientras que en la razón $\frac{a}{b}$, los números a y b pueden ser decimales.

16. PROPORCIÓN

Una proporción es la igualdad entre dos razones.
Ejemplo:

$$\frac{7}{8} \text{ y } \frac{14}{16}.$$

Se concluye que: $\frac{7}{8} = \frac{14}{16}$.
Esta igualdad de dos razones constituye una proporción.
Se establece que: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es una proporción, y se lee:

a es a *b* como *c* es a *d* en donde a y d se denomina extremos, b y c son los medios.

$$\text{extremo} \leftarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \text{medio}$$

medio ← b   d → extremo

En toda proporción se cumple la propiedad fundamental que dice:

El Producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$a \times d = b \times c$$

Esta propiedad es muy útil para la solución de problemas en los cuales se puede aplicar una proporción, puesto que si se conoce tres de sus términos, se puede encontrar el valor del cuarto elemento.

Propiedades Fundamentales

En toda proporción se cumple que; el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Ejemplo: En la proporción: $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$ $\quad 5 \times 6 = 3 \times 10$

$30 = 30$

Esta propiedad fundamental permite resolver una proporción; si se conocen tres de sus términos se pueden encontrar el valor del cuarto elemento.

Al valor desconocido la llamaremos x.

Para no confundir el signo de multiplicación con la letra x, utilizaremos el punto (.)como símbolo para multiplica

Ejemplo: Verifique si es o no una proporción $\frac{2}{13} = \frac{4}{5}$

No es una proporción:

$$(2)\,(5) \neq (13)\,(4)$$
$$10 \neq 52.$$

Ejemplo : Encuentre el valor desconocido

$$\frac{x}{7} = \frac{x-4}{3}$$
$$(3)\,(x) = 7(x-4)$$
$$3x = 7x-28$$
$$3x - 7x = -28$$
$$-4x = -28$$
$$\frac{-4x}{-4} = \frac{-28}{-4}$$
$$x = 7$$

Ejemplo: y: 0,05 :: 2:3

$$\frac{y}{0,05} = \frac{2}{3}$$

$$(y)\,(3) = (2)\,(0,05)$$
$$3y = 0,10$$

$$y = \frac{0,10}{3}$$

$$y = 0,033$$

Actividad 

I. Hallar el término desconocido en:

1. 9 : x :: 2 : 3.
2. x : 0,02 :: 24 : 0,2.
3. $\frac{7}{2} : \frac{1}{6} :: x : \frac{2}{3}$.
4. 0,04: x :: x : 0,64.

II. Resuelva los siguientes problemas

1. Una máquina ha producido 100 piezas en 4 horas, ¿Cuántas producirá en 6 horas?
A) 125
B) 150
C) 140
D) 180

2. Un transportista cobra 3€ por cada 4 km ¿Cuánto cobrará por un recorrido de 120 km?
A) 90
B) 60
C) 75
D) 100

3. Mayra recibe B / 21,00€ por cuidar de un niño durante 3 horas. ¿Cuánto cobrará si lo cuida 2 horas?
A) 14
B) 12
C) 10
D) 16

4. José ha tardado 3 horas en mecanografiar 16 hojas de su trabajo de historia ¿Cuántas podrá mecanografiar en una hora y media?
A) 6
B) 10
C) 8
D) 9

5. Si un ciclista tarda 2,5 horas en llegar a una ciudad a una velocidad de 30 km/h. ¿ Cuánto tardará en llegar a una velocidad de 25 km/h?
A) 5
B) 4
C) 2
D) 3

6. Un chocolatero quiere repartir bombones en 15 cajas de 8 unidades cada una. ¿Cuántas cajas necesita si quiere colocarlos en cajas de 6 bombones cada una?
A) 18
B) 24
C) 15
D) 20
7. Entre 6 compañeros realizan un trabajo en 12 horas. ¿Cuánto tardarían si lo hicieran con tres compañeros más?
A) 6
B) 8
C) 10
D) 18
8. Con la hierba que tengo puedo alimentar 15 vacas durante 6 días. ¿Cuántas vacas podré alimentar con la misma hierba durante 9 días?
A) 12
B) 9
C) 11
D) 10
9. Andando a 60 pasos por minuto tardo 25 minutos en llegar a mi casa. ¿ Cuánto tardaré a 80 pasos por minuto
A) 20 m. 30 sg.
B) 18 m. 45 sg.
C) 15 m.
D) 24 m.
10. 6 amigos se reparten una caja de galletas, tocándoles a cada uno 15 galletas ¿ Cuántas galletas les corresponderían si fueran 9 amigos?
A) 10
B) 15
C) 8
D) 12

17. MAGNITUDES PROPORCIONALES

Dos magnititudes, *a* y *b*, son **proporcionales** cuando existe una constante *k* (que llamamos **razón**) tal que $a = b{\cdot}k$ o bien $a = k / b$. En el primer caso decimos que son **directamente proporcionales** y cuando aumenta *a*, aumenta *b*, ó cuando disminuye *a*, disminuye *b*. En el segundo caso, decimos que son son **inversamente proporcionales** y cuando aumenta *a*, disminuye *b*, ó cuando disminuye *a*, aumenta *b*.

17.1 PROPORCIÓN DIRECTA

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar una, aumenta la otra en la misma proporción.

Un kilo de harina cuesta B/ 1,25 si compramos 4 kilogramos de harina nos costarán B/ 5,00 luego las magnitudes kg de harina y precio son dos magnitudes directamente proporcionales, al aumentar una aumenta la otra en la misma proporción. Al multiplicarse por 4 la cantidad de harina se multiplica por 4 el precio.

Llamamos **regla de tres directa** o **inversa** al método que nos permite conocer el valor de *a* cuando *b* aumenta o disminuye según una relación de proporcionalidad directa o inversa. O bien, conocer el valor de *b* cuando *a* aumenta o disminuye.

Regla de tres simple directa

Dadas dos magnitudes, se conocen la equivalencia entre un valor de una y el valor de la otra. Entonces para cada nuevo valor que se de a una magnitud calculamos el valor proporcional de la segunda magnitud

$$\begin{array}{ccc} \text{Magnitud A} & & \text{Magnitud B} \\ a & \longrightarrow & b \\ c & \longrightarrow & x \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ c \end{array}}\right\} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{x} \quad x = \frac{b \cdot c}{a}$$

El precio de tres bolígrafos es de B/ 4,50 ¿Cuánto cuestan 7 bolígrafos?

$$\begin{array}{ccc} \text{Bolígrafos} & & \text{Precio} \\ 3 & \longrightarrow & 4.5 \\ 7 & \longrightarrow & x \end{array} \quad \frac{3}{7} = \frac{4.5}{x} \qquad x = \frac{7 \cdot 4.5}{3} = 10.5$$

17.2 PROPORCIÓN INVERSA

> Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al aumentar una disminuye la otra en la misma proporción

Tres pintores tardan 10 días en pintar un edificio . ¿Cuánto tardarán seis pintores en hacer el mismo trabajo?

Al aumentar el número de pintores disminuye el tiempo que se tarda en pintar el edificio, como el número de pintores se multiplica por 2, el número de días que se emplean en pintar se divide por 2. Así tardarán 5 días.

REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA

Dadas dos magnitudes, se conocen la equivalencia entre un valor de una y el valor de la otra. Entonces para cada nuevo valor que se dé a una magnitud calculamos el valor proporcional inverso de la segunda magnitud.

Magnitud A Magnitud B

$$\left.\begin{array}{l} a \longrightarrow b \\ c \longrightarrow x \end{array}\right\} \quad \frac{a}{c}=\frac{x}{b} \quad x=\frac{a\cdot b}{c}$$

Una de las dos razones se invierte, para este caso se invirtió la razón $\frac{b}{x}$, por lo general casi siempre invierten donde está la incógnita.

Ejemplo:

En una granja avícola hay 300 gallinas que se comen un camión de grano en 20 días. Si se compran 100 gallinas más ¿En cuánto tiempo comerán la misma cantidad de grano?

Gallinas Días

$$\begin{array}{l} 300 \longrightarrow 20 \\ 400 \longrightarrow x \end{array} \quad \frac{300}{400}=\frac{x}{20} \quad x=\frac{20\cdot 300}{400}=15$$

ACTIVIDAD 

1. Completar la tabla para que las magnitudes de las columnas sean directamente proporcionales e indicar cuál es la constante de proporcionalidad.

1	**2**		**4**	**5**	**6**	***b***
0.75	**1.5**	**2.25**			**4.5**	

2. El precio de un paquete de 13 rotuladores es de B/ 9,75. ¿Cuántos rotuladores podemos comprar por el precio de B/ 15,75 ?.

3. José Manuel marca 5 goles cada 25 minutos de partido. Calcular cuántos goles marcará en una hora mediante una regla de tres. Indicar si es una proporcionalidad directa o inversa.

4, El precio por kilogramo de queso blanco es de B/ 2,50. ¿Cuánto nos costará comprar 125kg de queso? Indicar si es una proporcionalidad directa o inversa.

5. Si Lenn tarda 3 horas en estudiar los 5 primeros temas del examen, ¿cuántas horas más necesitamos para terminar de estudiar si en total hay 17 temas?

6. Para obtener el certificado de inglés Nathan, necesita obtener un 7 sobre 10 en el test, que consta de 243 preguntas. Calcular el número mínimo de preguntas correctas necesarias para obtenerlo.

7. Un autobús recorre 70km en dos horas. ¿Cuánto tardará en realizar un viaje de 345km? Indicar si es una proporcionalidad directa o inversa.

8. Tres personas tardan 12 horas en pintar un muro. ¿Cuántas personas se necesitan si se quiere conseguir la tarea en tan solo 4 horas?

9. El precio de un barril de petróleo de 100 litros es de B/ 50. ¿Cuál es el precio de 3 barriles de 75 litros?

10. Completar la tabla para que las magnitudes de las columnas sean inversamente proporcionales.

32	**8**		**1**	**6**	**16**	***b***
3	**12**	**4**	**96**			

11. Cinco operarios tardan 9 horas en revisar el motor de todos los trenes de la estación. ¿Cuánto se tardaría en realizar el mismo trabajo si se contratan a dos operarios más?

12. Cuando abrimos la manguera el nivel del depósito de agua desciende 20cm cada 5 minutos. Calcular el tiempo que tarda en vaciarse el depósito si su nivel máximo es de 2.3 m.

13. Tres trabajadores recolectan 100 manzanos en 5 horas. Uno de ellos ha sufrido un accidente laboral y no puede continuar con su labor. Calcular cuánto se tardará en recolectar los 300 manzanos restantes entre los dos trabajadores activos.

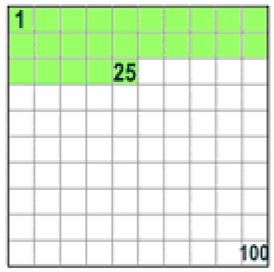
14. Una empresa de refrescos dispone de 3 máquinas embotelladoras, las suficientes para satisfacer un pedido diario de 2400 botellas. En verano el pedido diario asciende a 5600 botellas. Calcular cuántas máquinas embotelladoras han de alquilarse para asumir el incremento de la demanda.

15. Un camión realiza todos los días el mismo recorrido entre dos almacenes. Se sabe que tarda 3 horas y 20 minutos porque mantiene una velocidad constante de 90km/h. Se quiere entregar un paquete urgente, pero el camión no puede superar la velocidad de 110km/h.

18. EL TANTO POR CIENTO

Tanto por ciento: es una de las cien partes iguales en las que se puede dividir un número y se denota %.
Ejemplo: 30 por ciento se escribirá 30%. Esto indica que de las cien partes se tomó 30.
Tanto porciento

Así que **25%** quiere decir 25 por 100
(25% de la caja es verde)



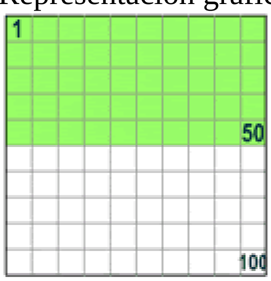
a. Conversión de porcentaje a fracciones.

Para convertir un tanto por ciento en forma fraccionaria se eliminará el signo del tanto por ciento, se le pondrá en el denominador 100 y se reducirá la fracción a su mínima expresión.
Ejemplo: a) 30% = 30/100 = 3/10 b) 25% = 25/100 = 5/20 = 1/4

b. Conversión de porcentaje a decimal

Regla: Para convertir un tanto por ciento a decimal, se elimina el signo del tanto por ciento y se recorre la coma decimal dos lugares a la izquierda.
Ejemplos:
a) 5% = 0,05 b) 12,98% = 0,1298 c) 99% = 0,99

Representación gráfica 50%



Para el cálculo de tanto por ciento, pueden presentarse tres casos diferentes:
1. Hallar qué número es el Tanto por ciento de otro.
2. Hallar qué Tanto por ciento es un número de otro
3. Hallar un número, dado otro número que es un Tanto por ciento de él.

Hallar el $\frac{1}{8}$% de 96.

Supuesto: 100% 96

Pregunta: $\frac{1}{8}$% x

$$\frac{100}{\frac{1}{8}} = \frac{96}{?}$$

$$\frac{96 \times 1/8}{100} = \frac{\frac{96}{8}}{100} = \frac{12}{100} = 0.12$$

R = 0.12

Actividad 

I. Convertir de fracción a porcentaje

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{9}{10}$

II. Convertir de porcentaje a fracción

a) 15% b) 34,5 % c) 0,04% d) $2\frac{1}{2}$% e) ¾ %

III. Problemas

1. Un boleto de avión a Costa Rica costaba B/ 530. Si ha subido un 20 %, ¿cuánto vale el boleto?

2. Un almacén pone una oferta un televisor de 32 pulgadas con una rebaja del 15 %. Si un televisor tiene un precio de B/ 325, ¿Cuánto es la rebaja? ¿Cuánto es el costo del televisor si se paga un impuesto de 7%?.

3. Lenn compró una laptop en B/ 600, pero tiene una rebaja de 25 %.
¿Cuánto pago por la laptop?

4. Nathan compró una bicicleta por B/ 250. Si quiere ganarse un 20%, ¿A cómo debe venderla?

5. Un pueblo tenía el año pasado 2500 habitantes y este año tiene 3010. ¿Qué tanto % ha aumentado la población?

6. Calcular el precio de una maleta de B/ 160 a la que se le aplicará una rebaja de un 60 por ciento.

7. En una tienda se aplica un mismo porcentaje de descuento en todos sus productos. Pagamos

B/ 12,00 por una camiseta que antes costaba B/ 18,00 ¿Cuál era el porcentaje de descuento?

Sitios de interés

1.http://www.sectormatematica.cl/basica/santillana/max_y_min.pdf

2. http://www.bdigital.unal.edu.co/40057/1/01186860.2013.pdf

3. https://www.portaleducativo.net/cuarto-basico/547/Operaciones-con-fracciones

4. https://www.youtube.com/watch?v=Hl7mx-XtPl8

5. https://www.youtube.com/watch?v=3AQLTvPnTQA

6. https://www.youtube.com/watch?v=m2CHDRgrkzY

7. http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Fraccio3y4Ejer.htm

8. http://www.polavide.es/rec_polavide0708/edilim/fracciones_inicio/fracciones.html

9.http://www.primaria.librosvivos.net/archivosCMS/3/3/16/usuarios/103294/9/5EP_Mat_cas_ud4_Resuelve_problemas/frame_prim.swf

10. http://ntic.educacion.es/w3//recursos/primaria/matematicas/fracciones/menuu1.htm

11. https://www.matesfacil.com/ESO/proporcionalidad/ejercicios-resueltos-proporcionalidad-directa-inversa.html

12. *https://www.thatquiz.org/es/previewtest?WDXP0256*